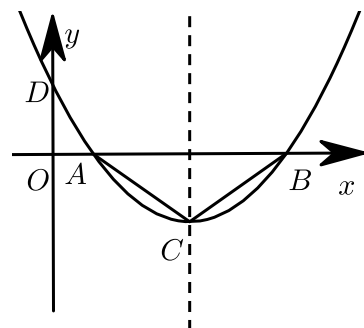


# 第3讲 二次函数几何最值问题之将军饮马、胡不归 (加油站)

## 一、将军饮马问题

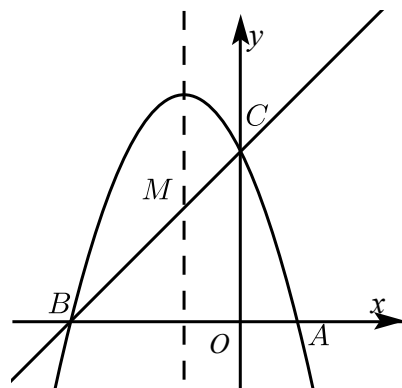
### 练习1

1. 如图，已知抛物线过点  $D\left(0, \frac{7}{9}\sqrt{3}\right)$ ，且在  $x$  轴上截得线段  $AB$  长为 6，若顶点  $C$  的横坐标为 4。



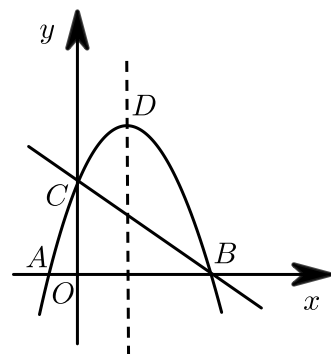
- (1) 求二次函数的解析式。
- (2) 在该抛物线的对称轴上找一点  $P$ ，使  $PA + PD$  最小，求出点  $P$  的坐标，以及  $PA + PD$  的最小值。

2. 如图，已知抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的对称轴为直线  $x = -1$ ，且抛物线经过  $A(1, 0)$ ， $C(0, 3)$  两点，与  $x$  轴交于点  $B$ 。

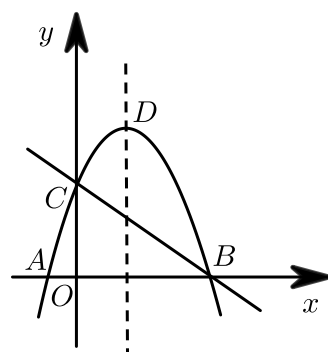


- ( 1 ) 若直线  $y = mx + n$  经过  $B$ 、 $C$  两点，求直线  $BC$  和抛物线的解析式。
- ( 2 ) 在抛物线的对称轴  $x = -1$  上找一点  $M$ ，使点  $M$  到点  $A$  的距离与到点  $C$  的距离之和最小，求出点  $M$  的坐标。

3. 如图，直线 $y = -x + 3$ 与 $x$ 轴、 $y$ 轴分别交于 $B$ 、 $C$ 两点，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过 $B$ 、 $C$ 两点，与 $x$ 轴另一交点为 $A$ ，顶点为 $D$ 。



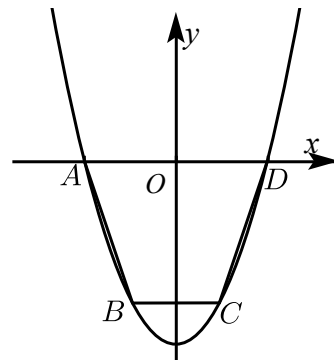
- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 在 $x$ 轴上找一点 $E$ ，使 $\triangle EDC$ 的周长最小，求符合条件的 $E$ 点坐标。
- (3) 在抛物线的对称轴上是否存在一点 $P$ ，使得 $\angle APB = \angle OCB$ ？若存在，求出 $PB^2$ 的值；若不存在，请说明理由。



备用图

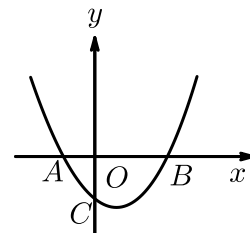
## 练习2

4. 如图，抛物线 $y = ax^2 + c$  ( $a > 0$ ) 经过梯形 $ABCD$ 的四个顶点，梯形的底 $AD$ 在 $x$ 轴上，其中 $A(-2, 0)$ ,  $B(-1, -3)$  .



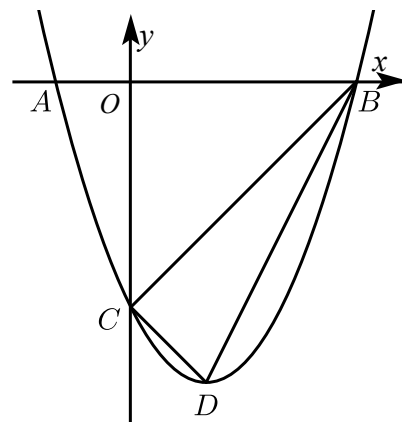
- ( 1 ) 求抛物线的解析式.
- ( 2 ) 点 $N$ 为 $y$ 轴上任意一点，当点 $N$ 到 $A$ 、 $B$ 两点的距离之差为最大时，求此时点 $N$ 的坐标.

5. 如图，抛物线经过 $A(-1, 0)$ ， $B(5, 0)$ ， $C\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ 三点．

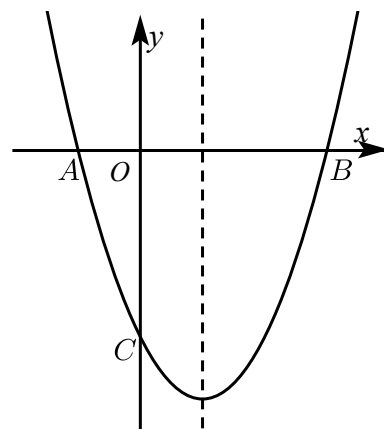


- ( 1 ) 求抛物线的解析式．
- ( 2 ) 点 $M$ 为抛物线上第四象限内的一动点， $\triangle MBC$ 面积是否存在最大值，若存在，求点 $M$ 的坐标，若不存在，请说明理由．
- ( 3 ) 在抛物线的对称轴上有一点 $P$ ，使 $|PB - PC|$ 的值最大，直接写出点 $P$ 的坐标．

6. 如图，抛物线解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$  .

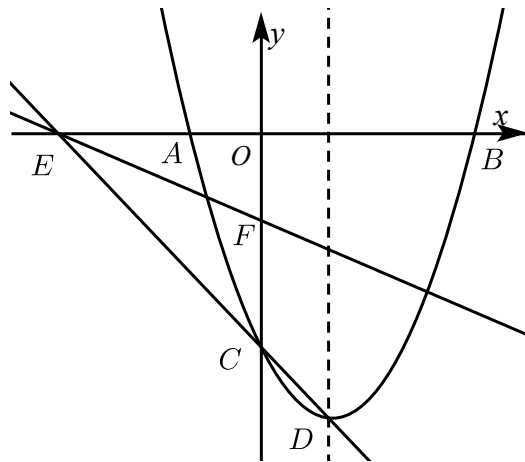


- ( 1 ) 点 $D$ 为抛物线的顶点，在抛物线上找点 $Q$ 使得 $S_{\triangle DBC} = S_{\triangle QBC}$ ，求出所有的点 $Q$  .
- ( 2 ) 在抛物线的对称轴上找一点 $P$ ，使得 $|PB - PC|$ 最大，求 $P$ 点坐标 .



### 练习3

7. 如图，已知抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点，与  $y$  轴交于  $C$  点，且  $OC = OB = 3OA = 3$ ，点  $D$  为抛物线顶点，作直线  $CD$  与  $x$  交于点  $E$ ，过  $E$  作  $\angle BED$  的角平分线与  $y$  轴交于点  $F$ 。



- (1) 求抛物线的表达式和点  $F$  的坐标。
- (2) 点  $M$  是射线  $EF$  上的动点，点  $N$  是线段  $BE$  上的动点， $M$ 、 $N$  在何位置时， $BM + MN$  的值最小。请求出  $BM + MN$  的最小值和  $M$ 、 $N$  的坐标。

## 练习4

8. 如图，抛物线  $y = -x^2 + 2x + m + 1$  ( $m$  为常数) 交  $y$  轴于点  $A$ ，与  $x$  轴的一个交点在 2 和 3 之间，顶点为  $B$ 。

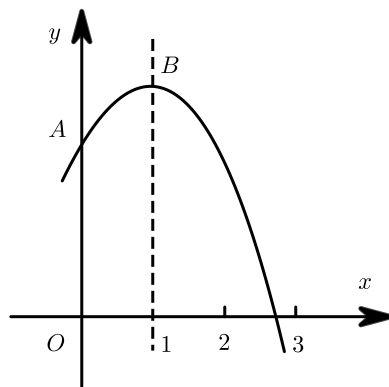
① 当  $-1 \leq x \leq 3$  时， $y > 0$ ；

② 抛物线  $y = -x^2 + 2x + m + 1$  与直线  $y = m + 2$  有且只有一个交点；

③ 将该抛物线向左平移 2 个单位，再向下平移 2 个单位，所得抛物线解析式为  $y = -(x + 1)^2 + m$ ；

④ 点  $A$  关于直线  $x = 1$  的对称点为  $C$ ，点  $D$ 、 $E$  分别在  $x$  轴和  $y$  轴上，当  $m = 1$  时，四边形  $BCDE$  周长的最小值为  $\sqrt{34} + \sqrt{2}$ 。

其中正确的判断有 ( )。



A. ①②③④

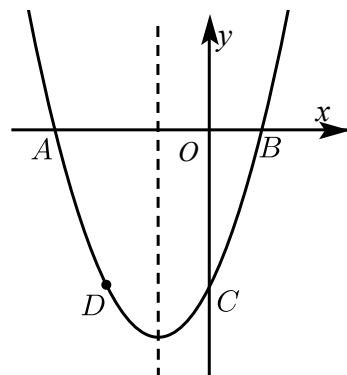
B. ②③④

C. ③④

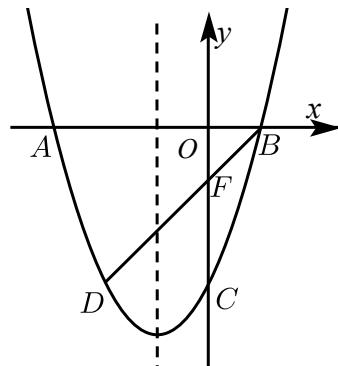
D. ②③



9. 如图，二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象与 $x$ 轴交于 $A, B$ 两点，其中 $A$ 点坐标为 $(-3, 0)$ ，与 $y$ 轴交于点 $C$ ，点 $D(-2, -3)$ 在抛物线上。

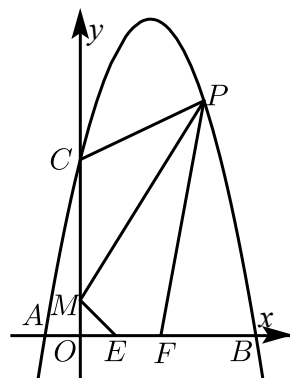


- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积。
- (3) 抛物线的对称轴上有一动点 $P$ ，求出 $PA + PD$ 的最小值。
- (4) 如图，若直线 $DB$ 与 $y$ 轴交于点 $F$ ，点 $M$ 是对称轴 $x = -1$ 上一个动点，点 $N$ 是 $x$ 轴上一个动点，则四边形 $CFNM$ 的周长是否有最小值？若有，试求出这个最小值；若没有，请说明理由。

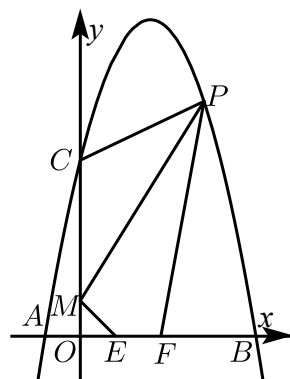


## 练习5

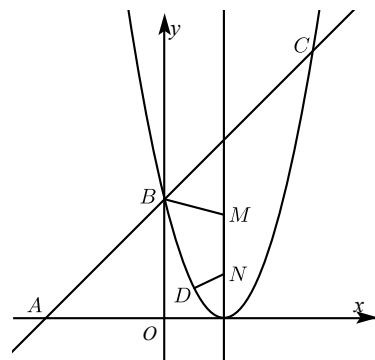
10. 如图，对称轴为直线 $x = 2$ 的抛物线经过点 $A(-1, 0)$ ， $C(0, 5)$ 两点，与 $x$ 轴另一交点为 $B$ ，已知 $M(0, 1)$ ， $E(a, 0)$ ， $F(a + 1, 0)$ ，点 $P$ 是第一象限内的抛物线上的动点。



- (1) 求此抛物线的解析式。
- (2) 当 $a = 1$ 时，求四边形 $MEFP$ 面积的最大值，并求此时点 $P$ 的坐标。
- (3) 若 $\triangle PCM$ 是以点 $P$ 为顶点的等腰三角形，求 $a$ 为何值时，四边形 $PMEF$ 周长最小？请说明理由。

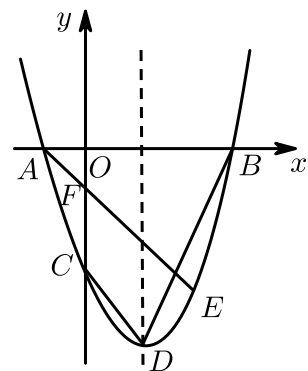


11. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = 2$ ，且经过 $B(0, 4)$ ， $C(5, 9)$ ，直线 $BC$ 与 $x$ 轴交于点 $A$ 。

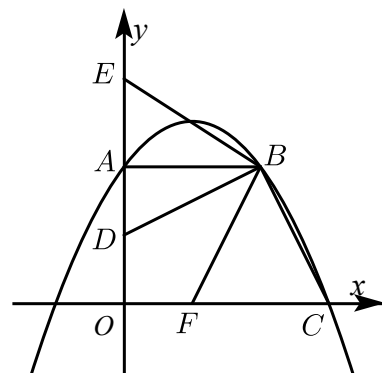


- ( 1 ) 求出直线 $BC$ 及抛物线的解析式。
- ( 2 )  $D(1, y)$ 在抛物线上，在抛物线的对称轴上是否存在两点 $M$ 、 $N$ ，且 $MN = 2$ ，点 $M$ 在点 $N$ 的上方，使得四边形 $BDNM$ 的周长最小，若存在，求出 $M$ 、 $N$ 两点的坐标，若不存在，请说明理由。

12. 如图，抛物线  $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 - 2x - 6\sqrt{2}$  与  $x$  轴交于  $A, B$  两点（点  $A$  在点  $B$  左侧），与  $y$  轴交于点  $C$ ，点  $D$  为顶点，点  $E$  在抛物线上，且横坐标为  $4\sqrt{2}$ ， $AE$  与  $y$  轴交于  $F$ 。点  $M, N$  是抛物线对称轴上两点，且  $M(2\sqrt{2}, a), N(2\sqrt{2}, a + \sqrt{2})$ ，是否存在  $a$  使  $F, C, M, N$  四点所围成的四边形周长最小，若存在，求出这个周长最小值，并求出  $a$  的值。



13. 如图，已知在平面直角坐标系 $xOy$ 中，直角梯形 $OABC$ 的边 $OA$ 在 $y$ 轴的正半轴上， $OC$ 在 $x$ 轴的正半轴上， $OA = AB = 2$ ， $OC = 3$ ，过点 $B$ 作 $BD \perp BC$ ，交 $OA$ 于点 $D$ ．将 $\angle DBC$ 绕点 $B$ 按顺时针方向旋转，角的两边分别交 $y$ 轴的正半轴、 $x$ 轴的正半轴于点 $E$ 和 $F$ ．

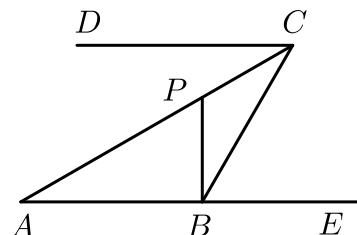


- ( 1 ) 求经过 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 三点的抛物线的解析式．
- ( 2 ) 当 $BE$ 经过( 1 )中抛物线的顶点时，求 $CF$ 的长．
- ( 3 ) 在抛物线的对称轴上取两点 $P$ 、 $Q$  (点 $Q$ 在点 $P$ 的上方)，且 $PQ = 1$ ，要使四边形 $BCPQ$ 的周长最小，求出 $P$ 、 $Q$ 两点的坐标．

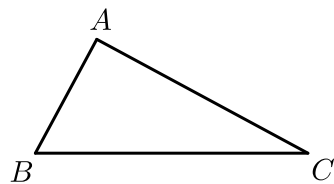
## 二、胡不归问题

### 练习6

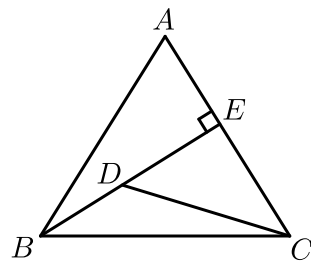
14. 如图，已知 $AE \parallel CD$ ， $AB = 2$ ， $\angle CBE = 2\angle A = 60^\circ$ ， $P$ 是线段 $AC$ 上的任意一点，则 $BP + \frac{1}{2}CP$ 的最小值为（ ）.



- A.  $\sqrt{3}$                       B. 2                      C.  $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$                       D.  $\sqrt{3} + 1$
15. 已知点 $Q\left(\frac{9}{2}, y_Q\right)$ 在二次函数 $y = x^2 - 4x - 5$ 图象上，点 $A$ 为抛物线与 $x$ 轴的交点且位于 $x$ 轴负半轴上. 点 $M(m, 0)$ 是 $x$ 轴正半轴上的一个动点. 则 $\frac{\sqrt{2}}{2}AM + QM$ 的最小值为 \_\_\_\_\_ .
16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $AB = 2$ ，若 $D$ 是 $BC$ 边上的动点，则 $2AD + DC$ 的最小值为 \_\_\_\_\_ .



17. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 10$ ， $\frac{BE}{AE} = 2$ ， $BE \perp AC$ 于点 $E$ ， $D$ 是线段 $BE$ 上的一个动点，则 $CD + \frac{\sqrt{5}}{5}BD$ 的最小值是（ ）.



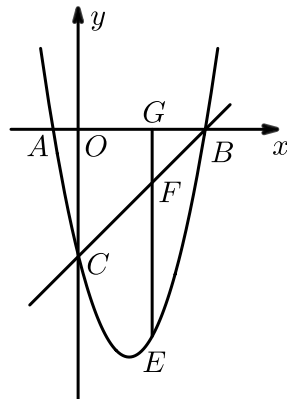
- A. 10                      B.  $2\sqrt{5}$                       C.  $5\sqrt{3}$                       D.  $4\sqrt{5}$

## 练习7

18. 抛物线  $y = ax^2 + bx - 5$  的图象与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点，与  $y$  轴交于点  $C$ ，其中点  $A$  坐标为  $(-1, 0)$ ，一次函数  $y = x + k$  的图象经过点  $B$ 、 $C$ 。

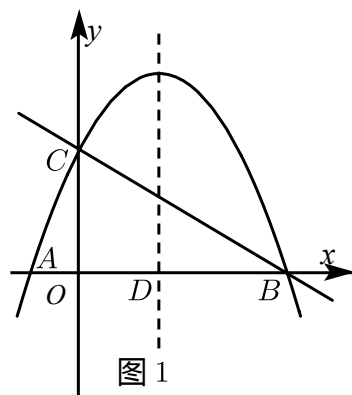
(1) 试求二次函数及一次函数的解析式。

(2) 如图，点  $E$  为抛物线位于直线  $BC$  下方图象上的一个动点，过点  $E$  作直线  $EG \perp x$  轴于点  $G$ ，交直线  $BC$  于点  $F$ ，当  $EF$  最大时，求点  $E$  的坐标。



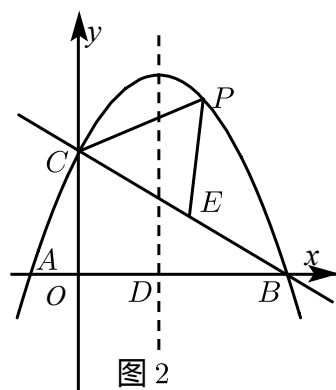
(3) 在 (2) 的情况下，在线段  $BC$  上有一动点  $D$ ，当  $ED + \frac{\sqrt{2}}{2}BD$  最小时，求点  $D$  坐标。

19. 如图1，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 与 $x$ 轴交于 $A$ 、 $B$ 两点（点 $A$ 在点 $B$ 的左侧），与 $y$ 轴交于点 $C$ ，对称轴与 $x$ 轴交于点 $D$ 。



(1) 求直线 $BC$ 的解析式。

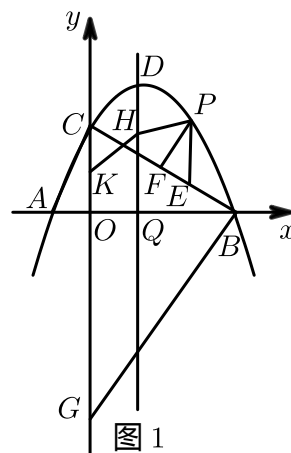
(2) 如图2，点 $P$ 为直线 $BC$ 上方抛物线上一点，连接 $PB$ 、 $PC$ 。当 $\triangle PBC$ 的面积最大时，在线段 $BC$ 上找一点 $E$ （不与 $B$ 、 $C$ 重合），使 $PE + \frac{1}{2}BE$ 的值最小，求点 $P$ 的坐标和 $PE + \frac{1}{2}BE$ 的最小值。





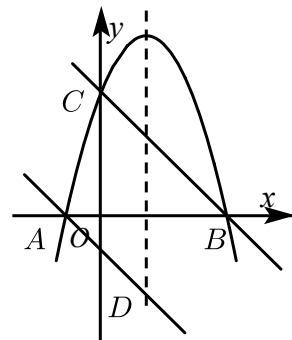
20. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3}$ 与 $x$ 轴交于 $A, B$ 两点（点 $A$ 在点 $B$ 左侧），与 $y$ 轴交于点 $C$ ，顶点为 $D$ ，对称轴与 $x$ 轴交于点 $Q$ 。

（1）如图1，连接 $AC, BC$ 。若点 $P$ 为直线 $BC$ 上方抛物线上一动点，过点 $P$ 作 $PE \parallel y$ 轴交 $BC$ 于点 $E$ ，作 $PF \perp BC$ 于点 $F$ ，过点 $B$ 作 $BG \parallel AC$ 交 $y$ 轴于点 $G$ 。点 $H, K$ 分别在对称轴和 $y$ 轴上运动，连接 $PH, HK$ 。当 $\triangle PEF$ 的周长最大时，求 $PH + HK + \frac{\sqrt{3}}{2}KG$ 的最小值及点 $H$ 的坐标。

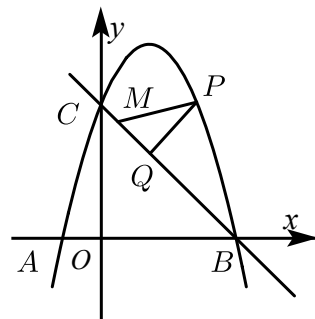


## 练习8

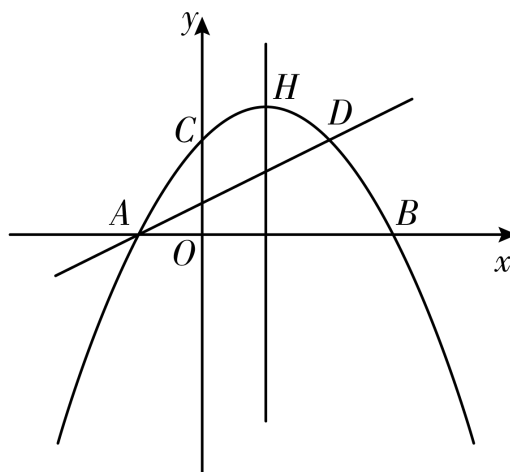
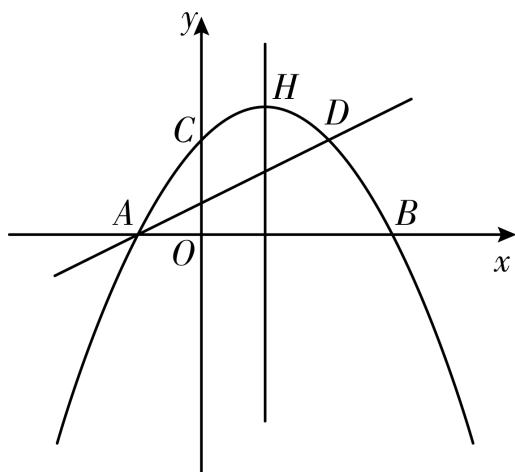
21. 如图，抛物线  $y = -\frac{6}{5}x^2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}x + 2$  的图象与  $x$  轴交于点  $A$ 、 $B$ ，与  $y$  轴交于点  $C$ ，连接  $BC$ ，过点  $A$  作  $AD \parallel BC$  交抛物线的对称轴于点  $D$ 。



- (1) 求点  $D$  的坐标。
- (2) 如图，点  $P$  是抛物线在第一象限内的一点，作  $PQ \perp BC$  于  $Q$ ，当  $PQ$  的长度最大时，在线段  $BC$  上找一点  $M$  (不与点  $B$ 、点  $C$  重合)，使  $PM + \frac{2}{3}BM$  的值最小，求点  $M$  的坐标及  $PM + \frac{2}{3}BM$  的最小值。



22. 如图，抛物线  $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于  $A(-1, 0)$  和  $B(3, 0)$ ，与  $y$  轴交于  $C$  点，点  $C$  关于抛物线的对称轴的对称点为点  $D$ ，抛物线顶点为  $H$ 。

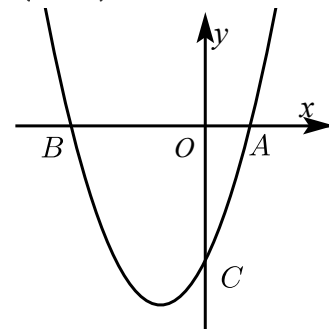


备用图

- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 当点  $E$  在抛物线的对称轴上运动时，在直线  $AD$  上是否存在点  $F$ ，使得以点  $A$ 、 $C$ 、 $E$ 、 $F$  为顶点的四边形为平行四边形？若存在，请求出点  $F$  的坐标。若不存在，请说明理由。
- (3) 点  $P$  为直线  $AD$  上方抛物线的对称轴上一动点，连接  $PA$ ， $PD$ 。当  $S_{\triangle PAD} = 3$  时，是否在  $x$  轴上存在一动点  $Q$ ，使  $PQ + \frac{\sqrt{5}}{5}QB$  最小，若存在，请直接写出此时点  $Q$  的坐标及  $PQ + \frac{\sqrt{5}}{5}QB$  的最小值。

23. 已知抛物线  $y = ax^2 - 2x + c$  ( $a, c$  为常数,  $a \neq 0$ ) 与直线  $y = kx + b$  都经过  $A(0, -3)$ ,  $B(3, 0)$  两点,  $P$  是该抛物线上的一个动点, 过点  $P$  作  $x$  轴的垂线交直线  $AB$  于点  $Q$ .
- (1) 求此抛物线和直线  $AB$  的解析式.
  - (2) 当点  $P$  在直线  $AB$  下方时, 求  $PQ + \sqrt{2}BQ$  取得最大值时点  $P$  的坐标.
  - (3) 设该抛物线的顶点为  $C$ , 直线  $AB$  与该抛物线的对称轴交于点  $E$ . 当以点  $P, Q, C, E$  为顶点的四边形是平行四边形时, 求点  $P$  的坐标.

24. 如图，抛物线  $y = x^2 - 2mx + 3m$  与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点，与  $y$  轴交于点  $C(0, -3)$ 。



- ( 1 ) 求该抛物线的解析式。
- ( 2 ) 点  $D$  为该抛物线上的一点、且在第二象限内，连接  $AC$ ，若  $\angle DAB = \angle ACO$ ，求点  $D$  的坐标。
- ( 3 ) 若点  $E$  为线段  $OC$  上一动点，试求  $2AE + \sqrt{2}EC$  的最小值。